Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 5

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 28. November 2019, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 5.1 ***Beweismechanikaufgabe*** (*4 Punkte*)

Bitte gehen Sie in dieser Aufgabe nach den Regeln der Beweismechanik vor und geben Ihre Lösung auf einem separaten Blatt in den Briefkasten mit der Aufschrift „Beweismechanikaufgaben" (Briefkasten 18) ab. Ihnen unbekannte Begriffe und Symbole können Sie in der Beweismechanik nachschlagen.

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$. Zeigen Sie, dass $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ für beliebige Teilmengen $A, B \subset X$ gilt.

Aufgabe 5.2 (*6 Punkte*)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Im Folgenden beziehen wir uns, wie üblich, auf die komponentenweise Addition von Matrizen und die in der Vorlesung eingeführte Matrizenmultiplikation

(a) Wir betrachten die Menge

$$M_1 := \{M \in M_{n\times n}(K) \colon A \text{ ist invertierbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass $(M_1, \cdot)$ eine Gruppe ist. Aus welchen Gründen ist $(M_1, +)$ keine Gruppe?

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass

$$M_2 := \left\{ M \in M_{n\times n}(K) |\ \exists a \in K : M = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

für jede Wahl von K und n ein Körper ist.

(c) Ist

$$M_3 := \left\{ M \in M_{n\times n}(K) |\ \exists a \in K \colon M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \vee M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

für jede Wahl von K ein Körper?

Aufgabe 5.3 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und seien $A \in M_{l\times m}(K)$ und $B \in M_{m\times n}(K)$. Für eine Matrix M bezeichnen wir im Folgenden mit S_M^j die j-te Spalte von M und mit Z_M^i die i-te Zeile von M.

(a) Zeigen Sie, dass die j-te Spalte von AB gleich dem Produkt von A und der j-te Spalte von B ist, d.h., dass

$$S_{AB}^j = A \cdot S_B^j.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Spalten von AB Linearkombinationen der Spalten von A sind

(c) Zeigen Sie, dass die i-te Zeile von AB gleich dem Produkt der i-te Zeile von A und B ist, d.h., dass

$$Z_{AB}^i = Z_A^i \cdot B.$$

(d) Zeigen Sie, dass die Zeilen von AB Linearkombinationen der Zeilen von B sind.

Aufgabe 5.4 (*2 Punkte*)

In dieser Aufgabe vollenden Sie den Beweis von Satz 8.3.

Sei e eine elementare Zeilenumformung von Typ 2, sei $E = e(I_m)$ und sei A eine $m \times n$-Matrix über einem Körper K. Zeigen Sie, dass $e(A) = EA$ gilt.